$\begin{cases} x' = P(x,y,z) \\ y' = Q(x,y,z) \\ z' = R(x,y,z) \end{cases}$, ili u simetričnom obliku $\dfrac{dx}{P(x,y,z)} = \dfrac{dy}{Q(x,y,z)} = \dfrac{dz}{R(x,y,z)}$.

Zatim se nađu dva (nezavisna) prva integrala sistema karakteristika jednačine (9): $\varphi_1(x,y,z) = C_1$, $\varphi_2(x,y,z) = C_2$, gdje su C_1 i C_2 konstante. (Napomenimo: funkcije $\varphi_1(x,y,z)$ i $\varphi_2(x,y,z)$ su nezavisne, ako ne postoji funkcija g takva da je $\varphi_2 = g(\varphi_1)$ ili $\varphi_1 = g(\varphi_2)$). Može se dokazati da je proizvoljno rješenje jednačine (9) funkcija

$$v = f\left(\varphi_1(x,y,z), \varphi_2(x,y,z)\right),$$

gdje je f proizvoljna neprekidno-diferencijabilna funkcija. Saglasno (8), proizvoljno rješenje jednačine (3) je funkcija

$$f\left(\varphi_1(x,y,z), \varphi_2(x,y,z)\right) = 0, \qquad (10)$$

gdje je f proizvoljna neprekidno-diferencijabilna funkcija. Ako se funkcija z nalazi samo u drugom od prvih integrala, tada se formula (10) može zapisati u obliku

$$\varphi_2(x,y,z) = \psi\left(\varphi_1(x,y)\right),$$

gdje je ψ proizvoljna neprekidno-diferencijabilna funkcija.

Primjer 3. Riješiti jednačine:

a) $y\dfrac{\partial z}{\partial x} + x\dfrac{\partial z}{\partial y} = x - y$, b) $2x\dfrac{\partial z}{\partial x} + (y-x)\dfrac{\partial z}{\partial y} - x^2 = 0$.

a) Sistem karakteristika u simetričnom obliku je $\dfrac{dx}{y} = \dfrac{dy}{x} = \dfrac{dz}{x-y}$. Iz $\dfrac{dx}{y} = \dfrac{dy}{x}$, odnosno $xdx - ydy = 0$ slijedi $x^2 - y^2 = C_1$ (prvi integral). Iz $\dfrac{dx}{y} = \dfrac{dy}{x} = \dfrac{dz}{x-y}$ slijedi da je $\dfrac{dx - dy}{y - x} = \dfrac{dz}{x-y}$, odnosno $dx - dy + dz = 0$, tj. $x - y + z = C_2$ (prvi integral). Kako su dobijeni prvi integrali nezavisni, to je proizvoljno rješenje date jednačine $z = -x + y + \psi\left(x^2 - y^2\right)$, gdje je ψ proizvoljna neprekidno-diferencijabilna funkcija.

b) Sistem karakteristika u simetričnom obliku je $\dfrac{dx}{2x} = \dfrac{dy}{y-x} = \dfrac{dz}{x^2}$. Iz $\dfrac{dx}{2x} = \dfrac{dz}{x^2}$ slijedi da je $xdx = 2dz$, $\dfrac{x^2}{2} - 2z = C'$, odnosno $x^2 - 4z = C_1$ (prvi integral). Iz $\dfrac{dx}{2x} = \dfrac{dy}{y-x}$ slijedi da je $y' - \dfrac{1}{2x}y = -\dfrac{1}{2}$, $y = \sqrt{x}\left(C' - \sqrt{x}\right)$, odnosno $\dfrac{(x+y)^2}{x} = C_2$ (prvi integral). Proizvoljno rješenje date jdnačine je $z = \dfrac{1}{4}\left[x^2 - \psi\left(\dfrac{(x+y)^2}{x}\right)\right]$, gdje je ψ proizvoljna neprekidno-diferencijabilna funkcija.